Županijsko natjecanje iz fizike - rješenja

- srednje škole: IV. grupa -

06.03.2018.

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak drugačijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. U ovom ćemo rješenju mirujući (početni) sustav označavati indeksom 1, a gibajući sustav indeksom 2. Pretpostavimo da se štap giba skupa sa sustavom 2 i u njemu zatvara kut θ_2 s osi x. Koliko iznosi pripadni kut θ_1? Ako su l_x i l_y komponente duljine teleskopa, tad vrijedi

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{l_{y2}}{l_{x2}} = \frac{l_{y1}}{\gamma l_{x1}} = \frac{1}{\gamma}\operatorname{tg}\theta_1, \qquad \text{[2 boda]}$$

gdje smo uzeli u obzir da u x-smjeru dolazi do kontrakcije duljine. Ovdje je

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{4}{\sqrt{15}} \qquad \text{[1 bod]}$$

Lorentzov faktor. U našem je slučaju $\theta_1 = \alpha$ i $\theta_2 = \alpha'$, odakle je

$$\alpha' = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\operatorname{tg}\alpha\right) \qquad \text{[1 bod]}$$

$$= 59.2^\circ. \qquad \text{[1 bod]}$$

Dakle, ako je teleskop prije početka gibanja bio postavljen pod kutom α', kontrakcija duljina će dovesti do toga da će opažač koji je ostao mirovati vidjeti da je teleskop opet pod kutom α, međutim, u teoriji relativnosti, bitno je ono što vidi opažač koji se giba skupa s teleskopom. Ključno je za primjetiti da za opažača koji se počeo gibati zrake svjetlosti više ne upadaju pod istim kutom i to je razlog zašto njegov teleskop ne vidi zvijezdu. [3 boda]

Neka je ϕ kut pod kojim upada svjetlost. Tada vrijedi

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{v_y}{v_x}, \qquad \text{[1 bod]}$$

te je Lorentzova transformacija kuta ϕ povezana s Lorentzovom transformacijom brzina. Imamo

$$\operatorname{tg}\phi_2 = \frac{v_{y2}}{v_{x2}} = \frac{\frac{v_{y1}/\gamma}{1+uv_{x1}/c^2}}{\frac{v_{x1}+u}{1+uv_{x1}/c^2}} = \frac{1}{\gamma}\frac{v_{y1}}{v_{x1}+u} = \frac{1}{\gamma}\frac{\sin\phi_1}{\cos\phi_1 + u/c}. \qquad \text{[3 boda]}$$

Uvrštavanje $\phi_1 = \alpha$, $\phi_2 = \alpha''$ daje

$$\alpha'' = 48.2^\circ. \qquad \text{[1 bod]}$$

2. Prilikom ulaska u atmosferu, sunčeva svjetlost se lomi zbog razlike u indeksu loma. Ako je θ_{u} upadni kut, a θ_{i} izlazni kut svjetlosti, vrijedi

$$\sin\theta_{\mathrm{u}} = n\sin\theta_{\mathrm{i}}. \qquad [2\ \text{BODA}]$$

Iz geometrije vidimo da vrijedi

$$\theta_{\mathrm{i}} = \arcsin\frac{R}{R+h}, \qquad [2\ \text{BODA}]$$

kao i

$$\theta_{\mathrm{u}} = \theta_{\mathrm{i}} + \delta. \qquad [2\ \text{BODA}]$$

Odavde je

$$\begin{aligned} \delta &= \arcsin\frac{nR}{R+h} - \arcsin\frac{R}{R+h} && [1\ \text{BOD}] \\ &= 0.222^\circ = 13.34' && [1\ \text{BOD}] \end{aligned}$$

Vidimo također da je kut δ približno jednak kutnoj veličini sunca θ, što znači da promatrani efekt nije zanemariv, već je prividna slika sunca za jednu širinu iznad pravog položaja sunca.

[1 BOD]

3. Elektroni se zbog svoje valne prirode ogibaju na pukotini. Uvjet za minimum difrakcije je dan formulom

$$d \sin \theta = m\lambda, \qquad \text{[2 BODA]}$$

gdje je λ valna duljina elektrona, a m red difrakcije. Prema de Broglieju, valna duljina elektrona je povezana s njihovom količinom gibanja p preko

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad \text{[2 BODA]}$$

gdje je h Planckova konstanta. Budući da se prvi red difrakcije događa pri kutu $\theta = 10°$, količina gibanja elektrona je

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{d \sin 10°}. \qquad \text{[1 BOD]}$$

Ako bi se brzina elektrona računala po formuli $v = p/m$, dobile bi se vrijednosti veće od brzine svjetlosti, što znači da je potrebno koristiti formulu za relativističku količinu gibanja $p = \gamma m v$, odakle je brzina elektrona

$$v = \frac{p/m}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}} \qquad \text{[2 BODA]}$$

$$= 2.20 \times 10^8 \,\mathrm{m/s}. \qquad \text{[1 BOD]}$$

Osim prvog minimuma, ostali minimumi se javljaju pri kutovima

$$\theta_m = \arcsin(m \sin 10°). \qquad \text{[1 BOD]}$$

Eksplicitno,

$$\theta_2 = 20.32°, \quad \theta_3 = 31.40°, \quad \theta_4 = 44°, \quad \theta_5 = 60.25°. \qquad \text{[2 BODA]}$$

4. Budući da sila teža djeluje samo u vertikalnom smjeru, iz drugog Newtonovog zakona $\Delta\vec{p}/\Delta t = \vec{F}$ odmah imamo vremensku ovisnost količine gibanja. Za horizontalni smjer,

$$p_x = \gamma m v_x = \gamma_0 m \frac{c}{3} \cos 30^\circ \quad \rightsquigarrow \quad \gamma v_x = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} c, \qquad \text{[1 BOD]}$$

gdje je $\gamma_0 = 3/2\sqrt{2}$ Lorentzov faktor u početnom trenu, a $\gamma = (1 - (v_x^2 + v_y^2)/c^2)^{-1/2}$ Lorentzov faktor u proizvoljnom trenu. Za vertikalni smjer imamo analogno

$$p_y = \gamma m v_y = \gamma_0 m \frac{c}{3} \sin 30^\circ - mgt \quad \rightsquigarrow \quad \gamma v_y = \frac{1}{4\sqrt{2}} c - gt. \qquad \text{[2 BODA]}$$

U najvišoj točki putanje, vertikalna brzina iščezava, $v_y = 0$, odakle slijedi

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{c}{g} && \text{[1 BOD]} \\ &= 5.40 \times 10^6 \text{ s} \approx 2 \text{ mjeseca.} && \text{[1 BOD]} \end{aligned}$$

Da bismo izračunali do koje će maksimalne visine doći hitac, koristimo rad-energija teorem, po kojem je rad kojeg je obavila sila teža jednak razlici kinetičkih energija hica

$$W = mgh = (\gamma_0 - 1)mc^2 - (\gamma - 1)mc^2 = (\gamma_0 - \gamma)mc^2. \qquad \text{[2 BODA]}$$

U najvišoj točki putanje, $v_y = 0$, tako da je, u tom trenu, $\gamma = (1 - (v_x/c)^2)^{-1/2}$, pa iz prve jednadžbe imamo

$$v_x = \sqrt{\frac{3}{35}} c \quad \rightsquigarrow \quad \gamma = \frac{\sqrt{35}}{4\sqrt{2}}. \qquad \text{[1 BOD]}$$

Odavde je maksmalna visina

$$\begin{aligned} h &= \frac{6 - \sqrt{35}}{4\sqrt{2}} \frac{c^2}{g} && \text{[1 BOD]} \\ &= 1.36 \times 10^{14} \text{ m,} && \text{[1 BOD]} \end{aligned}$$

što odgovara udaljenosti daleko izvan Sunčevog sustava.

5. Ako sunčeva svjetlost intenziteta I upada na solarni panel apsorbancije α, tada je apsorbirani intenzitet I_{abs} jednak

$$I_{\text{abs}} = \alpha I \qquad [1 \text{ BOD}]$$

i on se u potpunosti iskoristi za zagrijavanje vode. Ako vodu smatramo crnim tijelom u ravnoteži na (termodinamičkoj) temperaturi T, tada će vrijediti

$$I_{\text{abs}} = \alpha I = \sigma T^4, \qquad [2 \text{ BODA}]$$

gdje je σ Stefan-Boltzmannova konstanta. Ukoliko se apsorbancija solarnog panela promijeni na vrijednost α', nova će temperatura vode biti

$$\alpha' I = \sigma T'^4 \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Odavde slijedi

$$T' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{1/4} T \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Uvrštavanjem $\alpha'/\alpha = 0.9$ i pretvaranjem u stupnjeve Celzija, dobivamo

$$T' = 61\,^{\circ}\text{C}. \qquad [2 \text{ BODA}]$$